

GEOMETRIE AFFINE
Document de travail pour la préparation au CAPES
Troisième partie : CONVEXITÉ

Marie-Claude DAVID, Frédéric HAGLUND, Daniel PERRIN

Marie-Claude.David@math.u-psud.fr

8 décembre 2003

Dans cette troisième partie, nous étudions la notion de convexité. Il s'agit d'une notion très intuitive, intimement liée à celle de barycentre, que l'on rencontre (au moins implicitement) dès le collège dans les questions qui touchent aux cas de figures. Attention, les démonstrations des propriétés de convexité, même lorsqu'elles semblent évidentes, ne sont pas toujours faciles.

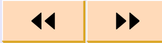
Faites des dessins, encore des dessins, toujours des dessins !

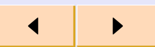


Accueil

Page de Titre

Sommaire





Page 2 de 11

Retour

Plein écran

Fermer

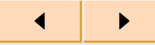
Quitter

Dans l'introduction, vous trouverez le mode d'emploi de ce document et les conseils de navigation.

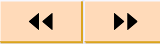
Table des matières

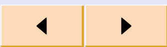












1. Définition et propriétés

1.1. Définition

Une partie X de E est dite **convexe** si pour tous points a et b de X, le segment $[ab]$ est contenu dans X.

1.2. Exemples

Démontrez les affirmations suivantes même si elles vous semblent évidentes.

1.2.1. ♠ Pour tous points a et b de E, le segment $[ab]$ est convexe. L'*intérieur* du segment $[ab]$ (noté $]ab[$) est le segment privé de ses extrémités. Montrez que c'est un convexe.

1.2.2. ♠ Un sous-espace affine de E est convexe.

1.2.3. ♠ Dans $\mathbb{R}$, les parties $[a, +\infty[$ et $]a, +\infty[$ sont convexes.

1.2.4. ♠ Dans un plan affine, un demi-plan (ouvert ou fermé) est convexe (voir II.3.7.2 et II.4.3).

1.3. Exercices

1.3.1. ♣. *Jonction de deux convexes* Soient A et B deux convexes non vides de E. On appelle “jonction” de deux convexes A et B l'ensemble $J(A, B)$ défini par :

$$J(A, B) = \{z \in E \mid \exists x \in A, \exists y \in B,\ z \in [xy]\}.$$

Montrer que C est convexe. Que peut-on dire quand A n'est pas convexe ?

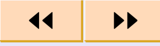
1.3.2. ♡ Montrez qu'une union croissante de convexes indexés par $\mathbb{N}$ est convexe. Plus généralement, si $(C_i)_{i \in I}$ est une famille de convexes telle que pour tous i, j il existe k avec

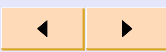


Accueil

Page de Titre

Sommaire





Page 5 de 11

Retour

Plein écran

Fermer

Quitter

$C_i \cup C_j \subset C_k$, alors l'union des C_i est convexe.

1.4. Proposition

i) Si une partie est stable par barycentration à masses positives, elle est convexe.

ii) Soient X un convexe de E, r un entier naturel non nul et $\{(a_1, \lambda_1), (a_2, \lambda_2), \dots, (a_r, \lambda_r)\}$ une famille de points pondérés de X de masse totale non nulle. Si les masses λ_i sont toutes positives ou nulles alors le barycentre de la famille appartient à X. iii) L'intersection d'une famille de convexes est un convexe.

Démonstration :

i) résulte de la définition.

ii) Nous allons démontrer ce résultat par récurrence sur r :

a) La propriété est vraie pour $r = 1$ et $r = 2$ par définition.

b) Soient $A_r = \{(a_1, \lambda_1), (a_2, \lambda_2), \dots (a_r, \lambda_r)\}$ une famille de points pondérés de X de masse totale non nulle et g son barycentre. Si l'une des masses est nulle, le barycentre g de A_r est le même que celui d'une famille de $r - 1$ points donc si le barycentre de $r - 1$ points affectés de masses positives est dans X celui de A_r l'est aussi. Sinon, λ_r n'est pas nul et la famille $A_{r-1} = \{(a_1, \lambda_1), (a_2, \lambda_2), \dots (a_{r-1}, \lambda_{r-1})\}$ est de masse totale non nulle. Si X vérifie la propriété pour $r - 1$ points affectés de masses positives, le barycentre g' de A_{r-1} est dans X. Alors, par l'associativité des barycentres, g appartient au segment $[g', a_r]$ et donc à X.

On a donc montré que si X contient le barycentre de $r - 1$ de ses points affectés de masses positives, il contient le barycentre de r de ses points affectés de masses positives, or X contient tout segment dont il contient les extrémités, par récurrence on a donc obtenu la propriété (ii).

iii) Soit $(C_i)_{i \in I}$ une famille quelconque de convexes et C leur intersection. Si a et b sont deux points de C, cela signifie que a et b sont dans chacun des C_i. Par hypothèse, chaque C_i est convexe ; donc pour tout $i \in I$ on a $[ab] \subset C_i$. L'inclusion ayant lieu pour tout $i \in I$ on a

en fait $[ab] \subset C$. Ainsi C est bien convexe.

$\square$

Ainsi, une partie est convexe si et seulement si elle est stable par barycentration à masses positives. On notera l'analogie avec les sous-espaces affines.

2. Enveloppe convexe

2.1. Définition

Soit X une partie de E. L'intersection des convexes contenant X est un convexe et c'est le plus petit convexe contenant X. On l'appelle l'**enveloppe convexe** de X et on le note $\operatorname{Conv} X$.

2.2. Remarques

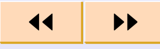
2.2.1. Notez l'analogie avec le sous-espace affine engendré, le sous-espace vectoriel engendré, mais aussi avec le sous-groupe engendré, l'adhérence (i.e. le fermé engendré), la tribu engendrée ...

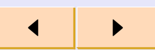
2.2.2. Pour déterminer l'enveloppe convexe de X, on choisit un convexe pas trop gros $\tilde{X}$ qui contient X et on essaye de montrer qu'il est contenu dans tout convexe contenant X ; la démonstration de la proposition suivante donne un exemple de ce procédé.

2.3. Proposition

L'enveloppe convexe de X est l'ensemble des barycentres des familles finies de points de X affectés de masses positives.







Démonstration. On note $\tilde{X}$ l'ensemble des barycentres des familles finies de points de X affectés de masses positives. D'après la propriété 1.4 (ii) des convexes, $\tilde{X}$ est contenu dans $\mathrm{Conv}\, X$. Evidemment, $\tilde{X}$ contient bien X (les singletons étant des parties finies particulières).

Pour conclure, il reste à montrer que $\tilde{X}$ est convexe . Soient a et b deux points de $\tilde{X}$: il existe donc deux suites finies de points $a_0, \cdots, a_n$ et $b_0, \cdots, b_m$ ainsi que deux suites finies de réels (strictement) positifs $s_0, \cdots, s_n$ et $t_0, \cdots, t_m$ (avec $\Sigma_{i=0}^n s_i = \Sigma_{j=0}^m t_j = 1$) tels que $a = \Sigma_{i=0}^n s_i a_i$ et $b = \Sigma_{j=0}^m t_j b_j$. Un point p du segment $[ab]$ est de la forme $p = \lambda a + (1-\lambda) b$ avec $\lambda \in [0;1]$. Nous pouvons appliquer ici le théorème de double associativité pour les barycentres : nous obtenons que p est le barycentre de la famille $(a_0, \cdots, a_n, b_0, \cdots, b_m)$ affectée des coefficients $(\lambda.s_0, \cdots, \lambda.s_n, (1-\lambda).t_0, \cdots, (1-\lambda).t_m)$. En particulier, p est barycentre d'une famille finie de points de X affectée de coefficients strictement positifs. Donc $p \in \tilde{X}$.

2.4. Triangle

2.4.1. *Définition.*

Soient a, b et c trois points affinement indépendants d'un plan affine. Le **triangle (plein)** abc est l'enveloppe convexe des points a, b et c. Les **sommets du triangle** abc sont les points a, b et c. Les **côtés** de abc sont les segments $[ab]$, $[ac]$ et $[bc]$.

2.4.2. *Corollaire.*

Le triangle abc est l'ensemble des points m dont les coordonnées barycentriques dans le repère (a, b, c) sont positives ou nulles.

*Démonstration :*Résulte de la proposition 2.3 et de la définition des coordonnées barycentriques.

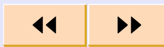
$\square$

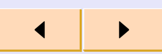


Accueil

Page de Titre

Sommaire





Retour

Plein écran

Fermer

Quitter

2.5. Exemples

2.5.1. ♠ Montrer, par l'exemple du triangle plein, qu'en général l'enveloppe convexe d'une partie X n'est pas l'union des segments d'extrémités appartenant à X.

On a cependant :

2.5.2. ♠ Montrez que, si A et B sont convexes, $J(A, B)$ (voir 1.3.1) est l'enveloppe convexe de $A \cup B$.

2.5.3. ♠ Montrer que si A est convexe et b un point de E, $\mathrm{Conv}(A \cup \{b\})$ est la réunion des segments $[ab]$ où a est dans A.

2.6. Exercices

2.6.1. ♣ Déterminer $\mathrm{Conv}(A)$ si A est la réunion de la droite $\{(x, y)/y = 0\}$ et du point $(0, 1)$ dans $\mathbb{R}^2$. L'enveloppe convexe d'une partie fermée de $\mathbb{R}^2$ est-elle toujours fermée ?

2.6.2. ♣ Soient A et B deux parties de E. Étudier les inclusions entre $\mathrm{Conv}(A \cap B)$, $\mathrm{Conv}(A) \cap \mathrm{Conv}(B)$ et $\mathrm{Conv}(\mathrm{Conv}(A) \cap \mathrm{Conv}(B))$.

2.6.3. ♣ Si une partie A finie est contenue dans une droite D, montrer que $\mathrm{Conv}(A)$ est l'union des segments d'extrémités appartenant à A.

Montrer que le résultat reste valable avec A non nécessairement finie (écrire A comme l'union de ses parties finies).

2.6.4. ♣ *Suite et fin de II.4.5*

e) Montrer que F est contenu dans l'enveloppe convexe C des points $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$.

f) Montrer que F est convexe et conclure.

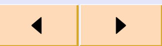


Accueil

Page de Titre

Sommaire





Page 9 de 11

Retour

Plein écran

Fermer

Quitter

3. Convexité et topologie

La topologie et la théorie des convexes sont souvent étroitement liées. La raison principale de ce fait est que la topologie de $\mathbb{R}^n$ est définie à l'aide des boules associées à une norme, or celles-ci sont des convexes. Nous rappelons ci-dessous quelques faits importants.

3.1. Normes

♠. Rappelez les axiomes définissant une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^n$.

On montre que toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes (rappelez ce que cela signifie). Cela implique que les ouverts (i.e. réunions de boules ouvertes) pour ces normes sont les mêmes.

3.1.1. ♠ Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. Montrez que les boules (ouvertes et fermées) de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ sont convexes.

3.1.2. ♠ Montrez que l'enveloppe convexe d'une partie bornée de $\mathbb{R}^n$ est bornée. (Ecrire la définition d'une partie bornée de $\mathbf{R}^n$ en terme de boules.)

3.2. Intérieur d'un triangle

3.2.1. *Proposition :* L'intérieur (topologique) du triangle abc est l'ensemble des points m de $\mathbb{R}^2$ dont les coordonnées barycentriques (α, β, γ) dans le repère (a, b, c) sont strictement positives.

*Démonstration :*Soit P_a (resp. P_b, P_c) le demi-plan fermé $\{m \in \mathbf{R}^2, \alpha \geq 0\}$ (resp. $\beta \geq 0$, $\gamma \geq 0$). Le triangle abc est l'intersection des trois demi-plans de P_a, P_b et P_c donc son intérieur (topologique) est l'intersection des trois demi-plans ouverts, intérieurs de P_a, P_b et



P_c, c'est-à-dire l'ensemble des points m de $\mathbb{R}^2$ dont les coordonnées barycentriques (α, β, γ) dans le repère (a, b, c) sont strictement positives.

□

3.2.2. ♠ L'intérieur de abc est encore convexe.

3.2.3. ♠ Si un point m est situé sur un segment $]ap[$, avec $p \in]bc[$, alors m est dans l'intérieur de abc. Réciproque ?

3.3. Exercices

3.3.1. ♣ Montrer que l'adhérence d'un convexe est convexe.

3.3.2. ♣ Montrer que l'intérieur d'un convexe est convexe. (Si A est convexe, que x et y appartiennent à son intérieur et z au segment $]xy[$, on utilisera l'homothétie de centre y qui envoie x sur z.)

3.3.3. ♣ Soit (a, b, c) un repère d'un plan affine E. On note $(\alpha_p, \beta_p, \gamma_p)$ les coordonnées barycentriques d'un point p de E dans ce repère.

On considère trois nombres réels positifs α_0, β_0, γ_0 et leur somme σ_0. On pose alors $T(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0) = \{p \in E, \alpha_p \geq \alpha_0, \beta_p \geq \beta_0, \gamma_p \geq \gamma_0\}$.

a) Identifier $T(0, 0, 0)$ et $T(1, 0, 0)$.

b) Montrer que $T(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ est convexe et qu'il est non vide si et seulement si $\sigma_0 \leq 1$. Que dire lorsque $\sigma_0 = 1$?

c) Montrer que si $\sigma_0 < 1$ alors $T(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ est le triangle pqr (avec $\beta_p = \beta_0$, $\gamma_p = \gamma_0$, $\alpha_q = \alpha_0$, $\gamma_q = \gamma_0$, $\alpha_r = \alpha_0$ et $\beta_r = \beta_0$). Comparer les directions des cotés de abc et pqr.







3.3.4. ♡ Si un convexe C de $\mathbb{R}^2$ est d'intérieur non vide, alors il est contenu dans l'adhérence de son intérieur. Cas où C est fermé ?

3.3.5. ♡ Si une partie F de $\mathbb{R}^2$ est fermée et stable par milieux (*i*.e. pour p, q dans F, le milieu de $[pq]$ est aussi dans F), alors F est convexe.

3.3.6. ♡ Montrer que l'enveloppe convexe d'une partie finie de $\mathbf{R}^2$ est compacte (on peut par exemple procéder par récurrence sur le cardinal de la partie finie et utiliser 2.5.3). Ainsi un triangle, un tétraèdre ou un cube (pleins) sont compacts.